МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики

Оскорбин Н.М.

Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности

Учебные материалы

БАРНАУЛ – 2018

Оскорбин Н.М. Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности: Учебное пособие. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2018. – 34 с.

Печатается по решению кафедры ТКПМ.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Алгазин Г.И.; д.э.н., профессор Мамченко О.П.

Учебно-методические материалы (ЭУМК ММПР-РН) включают учебные материалы по курсу, темы практических занятий, задания на самостоятельные и расчетные работы по дисциплине «Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности». Для магистрантов 1 курса, обучение очное (гр. 477М-ИТ, 478М-ПИ), ФМиИТ по направлениям: 09.04.03 Прикладная информатика: магистерская программа «Информационные технологии в управлении социальными и экономическими процессами»; 01.04.02 Прикладная математика и информатика: магистерская программа «Математическое моделирование и информационные технологии в экологии и природопользовании».

Раздел 1. Теоретические основы моделирования процессов принятия решений в условиях риска и неопределенности

1.1. Классификация и принципы Моделирование процессов и моделирование решений.

1.2. Комплекс моделей годового и стратегического планирования фирмы на основе производственных функций.

1.3. Математические модели обоснования решений в условиях риска и неопределенности.

Раздел 2. Теоретико-игровые математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности

2.1. Примеры математических моделей. Модель контроля с двумя ЛПР. Игра «Государство-Предприниматели».

2.2. Принципы выбора оптимальных стратегий в бескоалиционных играх (минимаксные стратегии, ситуации равновесия, устойчивые парето-оптимальные стратегии).

2.3. Поле игры. Гипотезы поведения игроков. Построение поля игры на примерах игры «Государство-Предприниматели» и модели контроля с двумя ЛПР.

Раздел 3. Прикладные модели принятия решений: примеры.

3.1. Оптимизация бонуса менеджеров производственной и финансовой компаний.

3.2. Математические модели планирования производства. Примеры.

Темы расчетных работ (индивидуальное задание)**:**

1. Задание к вопросу экзамена 1.1.3. Ответить на вопросы 1-41 теста (С. 7).
2. Задание 1 к вопросу экзамена 1.1.5. Обоснование решения проблемы «Затон в г. Барнаул (С. 8).
3. Задание 2 к вопросу экзамена 1.1.5. Модели решений в условиях неопределённости (С. 10).
4. Задание к вопросу экзамена 1.3.2. Портфельный анализ (С. 17).
5. Задание к вопросу экзамена 2.3.2. Исследование системы контроля (С. 17).
6. Задание к вопросу экзамена 3.1.2. Оптимизация бонуса менеджеров (С. 26).
7. Задание к вопросу экзамена 3.2.2. Планирования объединения предприятий (С. 27).

Оглавление

Раздел 1. Теоретические основы моделирования процессов принятия решений в условиях риска и неопределенности

Основные понятия теории принятия решений. Историческая справка. Технология решения прикладных задач поддержки принятия решений. Место исс… в математическом моделировании. Классификация математических моделей по типу математич… ствам предметной области. Понятие математической модели принятия решений. Моделирование процессов. Производственные функции. Модель стратегического планирования фирмы на основе производственной функции. Методы исполнения решений на различных этапах цикла принятия решений на примере задачи распределения ресурсов. Принципы обоснования решений в условиях риска и неопределенности. Портфельный анализ: модель Марковица. Инструментальные средства портфельного анализа.

Тема 1.1. Классификация и принципы. Моделирование процессов и решений.

1.1.1. Основные понятия теории принятия решений. Историческая справка.

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику, динамику природных и техногенных процессов. Математическое моделирование становится языком современной экономической теории, одинаково понятным для учёных всех стран мира.

Значительный вклад в развитие математических методов внесли коллективы Центрального экономико-математического института Академии наук СССР, ныне Российской Академии наук (сокращенно ЦЭМИ РАН) создан в 1963 г. по инициативе академика В. С. Немчинова на базе организованной им в 1958 г. Лаборатории экономико-математических методов. В качестве главной цели при создании института было провозглашено внедрение математических методов и ЭВМ в практику управления и планирования, создание теории оптимального управления народным хозяйством. В настоящее время цель трансформировалась в развитие фундаментальной теории и методов моделирования экономики переходного периода, разработку экономико-математического инструментария и программно-алгоритмических средств анализа экономики.

Методы математического моделирования традиционно применяются не только для исследования систем различной природы, но и для обоснования экономических, экологических, технических, управленческих решений в прикладных областях.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.7, 1.12, 1.18, 1.25, 1.29.

1.1.2. Технология решения прикладных задач поддержки принятия решений.

Схематически процесс исследования с использованием математических методов представлен на рисунке 1.1, где выделены главные составляющие: проблемная область; математическая (компьютерная модель) модель; результаты моделирования, в том числе теоретические (новые знания) и прикладные, направленные на решение рассматриваемой экономической проблемы.

Методы математического моделирования не являются универсальными и представляют особые требования к исследуемой проблемной ситуации. Наиболее существенными из них является *нетривиальность решаемой проблемы* и ее *начальная структурированность*.

Простые проблемы с незначительными ущербами лучше решать интуитивно на основе «здравого смысла».

Требование структурированности проблемы является более сложным, связанным со специальной обработкой проблемной области, выявлением главных факторов и существенных связей.

Характерным примером гениальной структурированности является формулировка закона всемирного тяготения, в математическом отражении которого используется две материальные точки массой m_1 и m_2 находящиеся на расстоянии r.

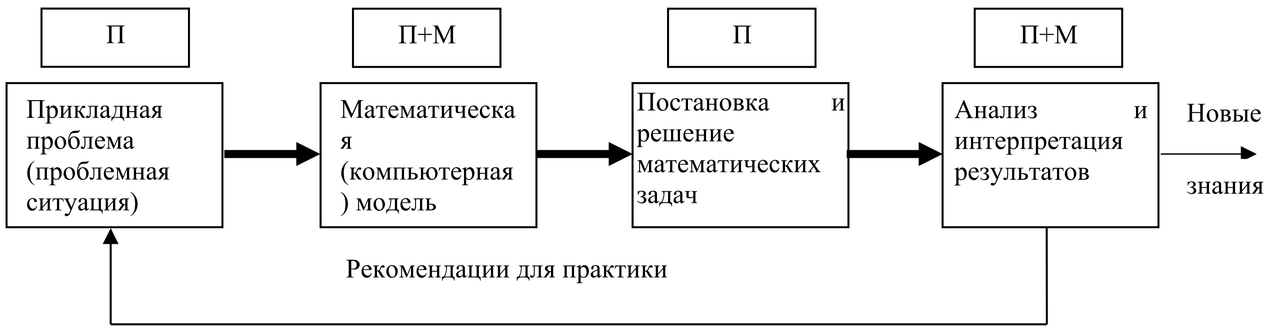


Рис. 1.1. Процесс решения проблемы с использованием математической (компьютерной) модели:

П – этапы аналитического исследования, функционально выполняемые предметными специалистами, в зависимости от предметной области; М – этапы аналитического исследования, функционально выполняемые математиками; П+М – этапы, выполняемые предметниками и математиками совместно.

Модель записана предельно просто. Сила сближения тел определена так: $F = \gamma m_1 \cdot m_2 / r^2$.

В работе[1] приведены примеры из произведений А.С. Пушкина проблемных ситуаций, которые в описании идеально подготовлены для их математического моделирования.

Другим аспектом рассматриваемой технологии является абстрактность получаемых результатов. На примере закона всемирного тяготения видно, что в чистом виде реально моделируемой системы не существует, однако теоретическое и прикладное значение этого закона трудно переоценить. По этому поводу можно привести слова А.С. Пушкина: «Сказка ложь, но в ней намек! Добрым молодцам урок». В нашем контексте сказка это – непосредственный результат, который следует из математической модели. На практике математику и предметному специалисту следует наполнить его предметным содержанием и творчески применить для решения рассматриваемой проблемы. Модель и результаты ее исследования выполняют функции **знаковой системы.** Исследователь, используя ассоциативные знания, формирует целостный образ требуемой реальной системы[2].

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.4, 1.10, 1.12.

---

[1] Оскорбин Н.М. Математическое моделирование социальных и экономических систем по произведениям А.С. Пушкина // Ломоносовские чтения на Алтае – 2012: сборник научных статей международной молодежной школы-семинара, Барнаул, 20-23 ноября. – Барнаул : АлтГПА, 2012. – Ч. II. – С. 280–286.

[2] Наглядным примером «знака» является слово «вулкан», который вызывает соответствующие реальности ассоциации различных образов.

1.1.3. Место исследования операций в математическом моделировании.

Исторически заметные и значимые применения математических методов в прикладных областях возникли параллельно с освоением ЭВМ, т.е. в 50-60 годах прошлого века. В научной литературе практика применения математических методов оформилась в рамках исследования операций[3]

Задание к вопросу экзамена 1.1.3. Ответить на вопросы 1-40 теста, приведенного в файле «ТЕСТ - начало исследования операций.pdf» (файл прилагается в МОДУЛ).

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.6, 1.7, 1.23.

1.1.4. Классификация математических моделей по типу математических задач и по свойствам предметной области

В теории экономико-математического моделирования выделяют 2 основных класса математических моделей (модели процессов и модели решений), используемых в трех типах исследовательских задач: оценка параметров экономических процессов и систем; прогнозирование временных рядов и событий; обоснование оптимальных решений.

Эти задачи можно выразить формулой активных действий: «знать», «предвидеть», «управлять». Отмеченная классификация математических моделей представлена на рисунке 1.2.

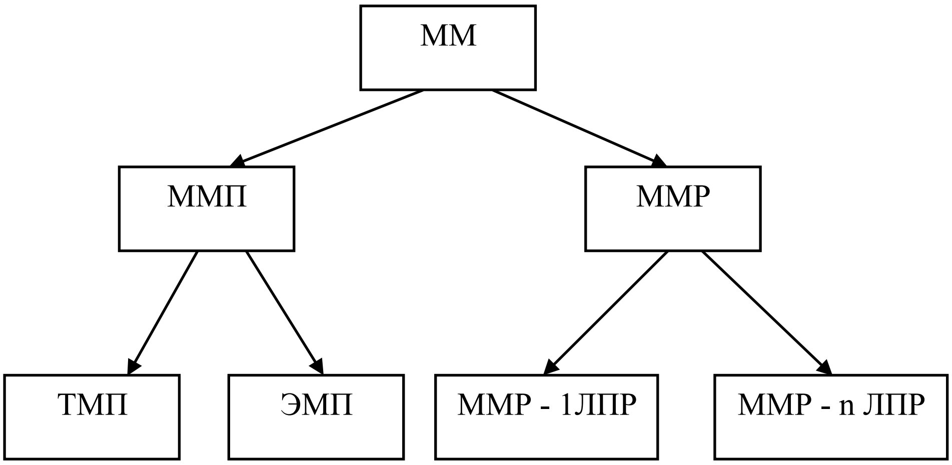


Рис. 1.2. Классификация математических (компьютерных) моделей.

Обозначения: ММ – математическая модель; ММП – математические модели процессов; ММР – математические модели решений (модели поддержки принятия оптимальных решений); ТМП – теоретические модели процессов; ЭМП – эмпирические модели процессов; ММР – 1 ЛПР – модели решений с 1 центром принятия решений (1 ЛПР); ММР - n ЛПР модели решений с многими (2 и более) центрами принятия решений.

ММ это отражение в математических символах или в компьютерных операторах существенных сторон исследуемого явления или процесса.

[3] https://ru.wikipedia.org/wiki/Исследование_операций

Существует строгое различие математических и компьютерных моделей. Свойства математических моделей и получаемые с их использованием результатов исследуются строгим математическим аппаратом (методами). Компьютерные модели исследуются на ЭВМ.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.2, 1.5, 1.12, 1.13, 3.8.

1.1.5. Понятие математической модели принятия решений

В данном месте следует пояснить объект моделирования, учитывая, что модель – отражение реальности. Конечным результатом модельных расчетов, является вариант решения, который предлагает аналитик. Но аналитик не несет ответственности за последствия принимаемого решения (кроме особых процедур страхования профессиональной ответственности). Кроме того, заказчик может дать задание аналитику предсказать решение конкурента в конкретной экономической ситуации.

В теории экономико-математического моделирования принято считать объектом моделирования ***лицо, принимающее решение*** (ЛПР). ЛПР – обобщенное и абстрактное понятие, в которое включено совокупность свойств реальных центров принятия решений, условий (экономических, финансовых, информационных, временных) в которых это решение формируется, границы зон ответственности решений, возможности (или невозможности) их корректирования и т.д. Реально решения могут приниматься с разной степенью рациональности в стандартных или в уникальных ситуациях.

В экономической литературе наиболее простым и часто используемым образом ЛПР выступает *экономический человек*[4]. Этим свойством наделяют субъектов экономической деятельности: не только отдельных людей, но и руководство предприятий, корпораций, органов государственного, местного самоуправления и стран в целом.

Модели решений с 1 ЛПР.

В простом случае считается, что ЛПР знает список возможных решений (математически множество X), полезность каждого решения (математически функция $z=f(x),\ x \in X$) и выбирает оптимальное решение $x^{¿} \in X$, которое имеет максимальную полезность.

Математически модель решений (1 ЛПР) записывается так: найти $x^{¿} \in X$ из условий[5]:

$$z^{¿}=f(x^{¿})=\max_{x \in X} f(x) \quad . \tag{1.1}$$

В этом выражении $z^{¿}$ или $f(x^{¿})$ – значение оптимальной (максимальной) полезности.

Задание 1 к вопросу экзамена 1.1.5. Пример задачи обоснования оптимального решения по проблеме «Затон в г. Барнаул. **И**сходные данные приведены в МОДУЛ.

[4] Экономический человек – условное общее понятие, представление о человеке как о рационально мыслящем субъекте, строящем свои планы и действия, исходя из принципа получения максимальной выгоды (Современный экономический словарь, 1997, с. 397).

[5] В литературе задача (1.1) носит название задачи математического программирования.

Модели решений с n ЛПР (модели теории игр).

На рисунке 1.2 выделены математические модели решений с n ЛПР ($n \geq 2$), которые используются для исследования экономических систем с многими центрами принятия решений. На практике трудно разделить системы с одним и многими центрами принятия решений. Но характерными примерами систем с n ЛПР выступают системы: «работник-работодатель», «контрольный орган-исполнитель», «товарный или финансовый рынки в условиях конкуренции», «корпоративное управление»[6].

Задачей при исследовании этих систем выступает построение математической (компьютерной) модели, с использованием которой можно предсказать решения всех ЛПР. Классической работой в данной области является книга Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, которая написана в США в 1944 г. На русском языке книга стала известной с 1970 г.[7]

Основные принципы математического моделирования экономических процессов и систем сохраняются и в рассматриваемой области. Дополнительными задачами выступают обоснование уровня знаний всех ЛПР объекта моделирования о своих списках решений, целевых функциях, порядках ходов, об уровнях взаимной информированности и принятых правилах совестного выбора и реализации решений. Трудности математического моделирования связаны с наличием неполной информации об условиях выбора решений и о решениях, принимаемых другими ЛПР[8].

Многокритериальные модели решений с 1 ЛПР

Рассматриваем модели решений с одним ЛПР, которое оценивает полезность решений вектором показателей. Например эффект инвестиций определяется их доходностью и уровнем риска. При выборе варианта решения необходимо найти компромисс между этими критериями. В общем случае на множестве решений $x \in X$ могут быть заданы *n* ($n \geq 2$) целевых показателей, часть которых требуется минимизировать, а часть – максимизировать. Без потери общности можно считать, что все критерии следует максимизировать[9]. В теории экономико-математического моделирования используют 2 подхода:

1. Свертка критериев, т.е. сведение многокритериальной задачи к однокритериальной задаче обоснования решений. Используют линейные и специальные нелинейные функции свертки частных критериев.

2. Выбор одного критерия в качестве ведущего и введение ограничений на уровни снижения значений по всем другим критериям.

---

[6] Основными участниками корпоративного управления выступают Собственники и Исполнительная дирекция. Собственники для защиты своих интересов на собраниях акционеров создают Совет внешних директоров, который при эффективном механизме корпоративного управления самостоятельным ЛПР не является. При этом всеми ресурсами корпорации (за исключением бюджета Совета внешних директоров и установленных границ компетенции) распоряжается Исполнительная дирекция.

[7] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

[8] В теории игр ЛПР называют игроками, целевые функции – функции выигрышей, варианты решений – стратегиями, полный набор решений – ситуацией игры. Выигрыш каждого игрока зависит от сложившейся ситуации.

[9] Минимизируемые показатели следует рассматривать с отрицательным знаком.

Пример. Пусть задана задача принятия решений с n ($n \geq 2$) критериями $z_1 = f_1(x),\ z_2 = f_2(x), \ldots,\ z_n = f_n(x),\ x \in X$. Введем интегральный критерий $z = F(x),\ x \in X$:

$z = F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, где $\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ – заданные «веса» частных критериев. Тогда многокритериальная модель решения сводится к модели (1.1) с целевой функцией $F(x)$.

Упражнение. Исследовать модель Марковица поиска оптимального инвестиционного портфеля, заданной ниже выражениями (1.23) – (1.25). Показать, что данная модель является двухкритериальной, а для поиска решения выбран подход 2, т.е. выбран ведущий критерий (какой?), а второй критерий (какой?) ограничен по значению.

Модели решений с 1 ЛПР в условиях природной неопределенности

В настоящее время разработаны варианты математических моделей решений (1 ЛПР) в условиях ограниченной информированности (ЛПР не знает полного списка решений, ЛПР неточно оценивает полезности решений, информированность аналитика не совпадает с информированностью ЛПР). Основные подходы к построению таких моделей связаны с использованием теории вероятностей (модели решений в условиях риска) и интервального (теоретико множественного) анализа (модели решений в условиях неопределенности[10]).

Общий вид математической модели в условиях неопределенности (не полной информированности ЛПР) задается следующими выражениями[11]:

$$f(x,\ w) \to \max_{x \in X} \left(\min_{x \in X} \right);\ f : X \times W \to R \quad (1.2)$$

В выражении (1.2) функция полезности является скалярной (в простом случае многокритериальность не рассматривается), множества $X,\ W$ – множество решений ЛПР и множество неконтролируемых параметров $w \in W$ – считаются известными аналитику и ЛПР. Следует отметить, что выражения (1.1) и (1.2), как модели поддержки принятия решения, существенно различны. Модель (1.1) является математической задачей оптимизации (линейное, нелинейное программирование, вариационного исчисления и др.). Для поиска оптимального решения согласно (1.2) необходима редукция этого выражения к математической задаче. Для этой редукции необходима математическая модель неконтролируемого параметра и модель отношения ЛПР к риску. Эти вопросы подробнее рассмотрим в разделе 1.3.

Задание 2 к вопросу экзамена 1.1.5. Рассмотреть примеры моделей обоснования решений в условиях неопределенности (задание в МОДУЛ).

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.7, 1.11, 1.14, 1.21.

---

[10] В рассматриваемом случае термин «неопределенность используется в двух смыслах. В названии подраздела «Модели решений с 1 ЛПР в условиях природной неопределенности», этот термин обозначает отсутствие информации у ЛПР при обосновании решений относительно параметров модели (1.1). Во втором случае этот термин используется тогда, когда неконтролируемые параметры случайными не считаются и предполагается, что они принадлежат заданному множеству.

[11] В теории принимается, что ЛПР частично информировано только о значениях функции полезности решений.

1.1.6. Моделирование процессов

Структурно модели процессов представляют в виде «черного ящика» (рисунок 1.3).

Задача математического моделирования процессов при условии достаточно точных наблюдений за входными переменными и выходной переменной формулируется следующим образом:

Найти функцию $y_0 = F(A,\ x)$ и доверительный интервал $[\varepsilon_H,\ \varepsilon_V]$ для значений ε_y. (1.3)

Тогда на практике можно знать ожидаемые значения выходной переменной при известных значениях вектора x : $y_0 + \varepsilon_H \le y \le y_0 + \varepsilon_V$.

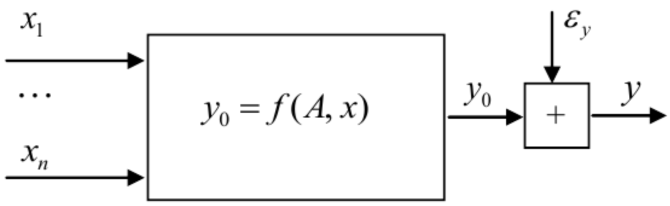


Рис. 1.3. Модель процесса в виде «черного ящика».

Обозначения: $x_1, \ldots, x_n$ – истинные значения вектора входных переменных; $y_0,\ y$ – значения детерминированной и случайной составляющих выходной переменной моделируемого процесса; ε_y – ненаблюдаемые внутренние аддитивные «шумы»; A – вектор параметров.

Математическая модель (1.3) называется ***эмпирической*** (ЭМП), если основная информация для ее построения – результаты наблюдений моделируемого процесса или наблюдений за процессами – аналогами моделируемого, и ***теоретической*** (ТМП), если существенно используются знания соответствующей теории.

Задание. Рассмотреть примеры построения эмпирических моделей процессов методом наименьших квадратов (МНК) (Задачи приведены в задании к вопросу экзамена 1-3-2 в МОДУЛ).

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.2, 1.15, 1.26, 1.27, 1.28.

Тема 1.2. Комплекс моделей годового и стратегического планирования фирмы на основе производственных функций

1.2.1. Производственные функции

Производственная функция (также функция производства) – экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска (количество продукции) и факторами производства, такими как затраты ресурсов, уровень технологий[12].

Производственная функция является примером моделей процессов (часто это теоретическая модель процесса производства товаров и/или услуг). Рассматривается годовое количество произведенной фирмой продукции в стоимостной или натуральной форме. Факторами производства выступают объемы потребленных фирмой ресурсов (в стоимостном или в

[12] См. https://ru.wikipedia.org/wiki/Производственная_функция.

натуральном измерении). Главными ресурсами выступают потребленные за год количества труда и капитала[13].

Определение. Функция $y=f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n),\; x_i \geq 0,\; i=1,\ldots,n$ называется производственной, если выполнены следующие ее свойства:

1. Нулевой выпуск в отсутствии одного или нескольких ресурсов.

2. Неотрицательная производительность факторов $f'_{xi} \geq 0,\; i=1,\ldots,n$.

3. Убывающая эффективность факторов $f''_{xi} \leq 0,\; i=1,\ldots,n$.

4. Линейная однородность или постоянная отдача от масштаба $f(\lambda \cdot x)=\lambda \cdot f(x)$.

Примеры производственных функций:

1. Классическая производственная функция Кобба-Дугласа (K – амортизация капитала фирмы, L – фонд заработной платы за рассматриваемый период времени):

$$y=d \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \tag{1.4}$$

где d, α – параметры функции, индивидуальные для фирмы ($d>0,\; \alpha \in [0,\, 1]$).

2. Обобщенная функция Кобба-Дугласа:

$$y=d \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} ¿ \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad x_i ¿ 0,\; \alpha_i ¿ 0,\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\; i=1,\ldots,n. \tag{1.5}$$

3. Линейная производственная функция:

$$y=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \quad x_i \geq 0,\; a_i > 0,\; i=1,\ldots,n. \tag{1.6}$$

4. Производственная функция с нулевой эластичностью замещения ресурсов:

$$y=\min\left(\frac{x_1}{q_1}; \frac{x_2}{q_2}; \ldots; \frac{x_n}{q_n}\right), \quad x_i \geq 0,\; q_i > 0,\; \cdots i=1,\ldots,n. \tag{1.7}$$

Задание 1 к вопросу 1.2.1. В записанных функциях (1.4) – (1.7) укажите аргументы и параметры, поясните их экономический смысл и размерности.

Задание 2 к вопросу 1.2.1. Покажите, что функции (1.4) – (1.7) удовлетворяют определению производственных функций.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1.9, 1.16, 1.19, 1.24.

1.2.2. Задача оптимального среднесрочного плана развития производства

С использованием производственной функции рассмотрим задачу выбора оптимального соотношения запасов ресурсов. Эту задачу можно интерпретировать как задачу среднесрочного планирования развития фирмы.

Пусть для некоторой фирмы известна производственная функция, ее товарная, ресурсная и технологическая политика стабильна, а спрос на продукцию неограничен. Пусть также в среднесрочной перспективе заданы границы интервалов $x_i^H,\, x_i^V,\; i=1,\ldots,n$ возможного изменения каждого из существенных производственных ресурсов: $x_i^H \leq x_i \leq x_i^V,\; i=1,\ldots,n$. Тогда можно найти

[13] В рамках 5 факторной модели фирмы ресурсами являются труд, капитал, земля, информация, предпринимательский потенциал.

оптимальные значения ресурсного обеспечения производства решение следующей задачи. Найти $x_i^*,\ i=1,\dots,n$ из условий:

$$P(x^*)=\max_x\left(y-0.06\,y-\sum_{i=1}^{n} C_i\cdot x_i\right); \qquad (1.8)$$

$$y=f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n),\ x_i^H\le x_i\le x_i^V,\ i=1,\dots,n. \qquad (1.9)$$

В задаче (1.8) – (1.9) $P(x^*)$ – оптимальная годовая прибыль производственной деятельности фирмы с учетом налога, равного 6% от выручки; C_i – цена ресурса *i* (для ресурсов производства, учитываемых в стоимостном измерении, их цена принимается равной единице).

Можно показать (с учетом свойств производственной функции), что задача (1.8) – (1.9) относится к классу задач выпуклого программирования и ее решение можно получить в среде Excel.

1.2.3. Методы исполнения решений на различных этапах цикла принятия решений на примере задачи распределения ресурсов

На практике Центры принятия и реализации решений не являются идеально организованными и хорошо информированными. Тогда ожидаемые результаты не совпадают с реальными, особенно в ситуациях при больших по времени периодов реализации решений. Возникает необходимость совершенствования методических, математических и инструментальных методов принятия и реализации решений.

Выделим следующие этапы цикла принятия и реализации решений:

1. Сбор исходных данных и анализ экономической проблемы.
2. Обоснование оптимального решения и его принятие.
3. Реализация решения.
4. Оценка полученного результата и при необходимости внесение изменений в регламентные процедуры.

Характерным примером для данной темы является проблема распределения ограниченного ресурса. Она возникает в бюджетной сфере государственного и муниципального управления, производственных системах (корпорациях), при организации коллективных действий в социологии и политике и др.

Пусть Центр располагает ограниченным ресурсом в объеме $R>0$ и ставит задачу его распределения по n исполнителям так, чтобы суммарная эффективность использования ресурса была максимальной. Обозначим $x_i\ge 0$ объем ресурса, выделяемого исполнителю *i (i=1,…,n)*. Будем считать, что вклад $Э_i$ исполнителя *i* в суммарную эффективность зависит от объема выделенного ресурса и определяется выражением: $Э_i(x_i)=d_i\cdot\sqrt{x_i},\ \ d_i>0$, где d_i – коэффициент, истинное значение которого Центр оценивает с погрешностью.

В предположении, что Центр идеально информирован, найдем оптимальное распределение $x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\dots,x_n^*)$ решением следующей задачи:

$$Э(x^{¿}) = \max_{x \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \sqrt{x_i} \right); \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq R. \tag{1.11}$$

Упражнение. Доказать, что в рассматриваемой формализации задачи при оптимальном решении Центр распределяет весь объем наличного ресурса и балансное ограничение (1.11) выполняется как равенство: $R - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Решение задачи (1.10) – (1.11) найдем с использованием метода множителей Лагранжа (см. ссылку: https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_множителей_Лагранжа). Ограничение $x \geq 0$ пока не рассматриваем. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot \sqrt{x_i} + \lambda \cdot \left(R - \sum_{i=1}^{n} x_i \right). \tag{1.12}$$

Составим систему из *(n+1)* уравнений, приравняв к нулю частные производные функции Лагранжа по $x_i,\ i=1,\dots,n$ и по λ: $L'_{xi} = d_i \cdot ¿ \left(2 \cdot \sqrt{x_i} \right) - \lambda = 0,\ i = 1, \dots, n;\ \ L'_{\lambda} = \left(R - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0$.

Найдем решение первых *n* уравнений записанной системы в зависимости от λ:

$$d_i / \left(2 \cdot \sqrt{x_i} \right) - \lambda = 0 \Rightarrow \sqrt{x_i} = d_i / (2 \cdot \lambda) \Rightarrow x_i = d_i^2 / (4 \cdot \lambda^2). \tag{1.13}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы с учетом выражения (2.13):

$$L'_{\lambda} = \left(R - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0 \Rightarrow R - \sum_{i=1}^{n} d_i^2 / (4 \cdot \lambda^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \lambda^2} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = R \Rightarrow \frac{1}{4 \cdot \lambda^2} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}. \tag{1.14}$$

Из выражений (1.13) и (1.14) имеем:

$$x_i^{¿} = \frac{d_i^2 \cdot R}{\sum_{i=1}^{n} d_i^2},\quad i = 1, \dots, n. \tag{1.15}$$

В рассматриваемом случае найденное решение системы *(n+1)* уравнений удовлетворяет ограничению $x \geq 0$ и является оптимальным распределением ресурсов в задаче (1.10) – (1.11), поскольку она относится к классу задач выпуклого программирования.

Рассмотрим порядок использования полученных расчетов на практике контроля процессов принятия и реализации решений, которое можно провести только после завершения цикла (после полной или частичной реализации решения). Для этого предлагается использовать расчетные и фактические значения эффективностей распределения и использования ресурсов. Профессиональное расследование эффективностей проводится с использованием методов экономической безопасности.

Оптимальное распределение ресурса согласно (1.15) зависит от коэффициента d_i: $x_i^{¿} = \tilde{x}_i^{¿}(d_i),\ i = 1, \dots, n$. Если при распределении ресурсов (не важна причина) использовались оценки $\hat{d}_i$ (в общем случае $\hat{d}_i \neq d_i$) то рассчитанные с использованием выражения (1.15), уровни эффективности $Э_i^{Ф} = Э_i^{Ф}\left(\tilde{x}_i^{¿}(\hat{d}_i) \right) = \hat{d}_i \cdot \sqrt{\tilde{x}_i^{¿}(\hat{d}_i)}$ отличаются от истинных значений (которые аналитику следует восстановить). Согласно этапу п.4 цикла принятия и реализации решений необходимо внести изменения в соответствующие регламенты, учитывая возможные причины отклонений: либо искажение информации, либо ошибки формализации проблемной ситуации, либо погрешности вычислений, либо объективное изменение условий принятия и реализации решений.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) п. 1.29.

Тема 1.3. Математические модели поддержки принятия решений в условиях риска и неопределенности.

1.3.1. Принципы обоснования решений в условиях риска и неопределенности.

Рассматриваем методы обоснования оптимальных решений с использованием математической модели (1.2). Если относительно значений параметра *w* информация ЛПР будет полной к моменту реализации решений (но не к моменту обоснования оптимального решения задачи), то ЛПР может найти решающую функцию $\widetilde{x}^{¿}(w): W \rightarrow X$:

$$\widetilde{x}^{¿}(w)=\arg\max_{x\in X} f(x,w), \quad \forall w \in W \,. \tag{1.16}$$

Рассмотрим случай, когда к моменту реализации решений ЛПР не знает вектор параметров *w*. В литературе рассматриваются два основных подхода к постановке математических задач поиска оптимального решения для модели ЛПР в форме (1.2):

- принципы принятия решений при неопределенности, например, принцип гарантированного результата;
- принцип осреднения.

Принцип гарантированного результата (критерии Вальда) предполагает выбор $x^{¿} \in X$ решением следующей задачи:

$$x^{¿}=\arg\sup_{x\in X}\inf_{w\in W} f(x,w)\,. \tag{1.17}$$

В данном случае ЛПР отыскивает наилучшее решение для наихудших для себя значений *w*. Заметим, что справедлива оценка

$$f(x^{¿},w)\geq L, \text{ где } L=\sup_{x\in X}\inf_{w\in W} f(x,w)\,.$$

Другие подходы к обоснованию оптимальных решений в условиях неопределенности представлены в методических материалах индивидуальных заданий.

Рассмотрим принцип осреднения, т.е. обоснование решений при риске. Предположим, что в (1.2) *w* подчиняется распределению с известной плотностью $P(w)$, тогда принцип осреднения предлагает выбор $x^{¿}$ с использованием следующей целевой функции:

$$\Phi(x)=M_w\left[f(x,w)\right], \tag{1.18}$$

где M_w – оператор математического ожидания.

Далее задача нахождения $x^{¿}$ сводится к (1.1) с целевой функцией (1.18).

Упражнение. Рассмотреть принципы обоснования решений Байеса-Лапласа, Сэвиджа, Гурвица для непрерывной модели и записать математические задачи поиска оптимальных решений, аналогичные задаче (1.17).

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) п. 2.4.

1.3.2. Портфельный анализ: модель Марковица.

Портфельная теория Марковица (англ. mean-variance analysis) – подход, основанный на анализе ожидаемых средних значений и вариаций случайных величин) – разработанная Гарри Марковицем методика формирования инвестиционного портфеля, направленная на оптимальный выбор совокупности активов, исходя из требуемого соотношения доходность/риск. Сформулированные им в 1950-х годах идеи составляют основу современной портфельной теории[14].

Можно рассмотреть два различных подхода к формированию портфеля.

Первый связан с выбором активов, доходность которых стабильна, но существует не нулевая вероятность потери активов. Тогда цель портфельного анализа состоит в определении оптимального набора активов, при котором риски потерь являются минимальными. Данная стратегия портфельного анализа выражена рекомендацией: «не храните яйца (деньги) в одной корзине (в одном банке, одном активе)».

Второй подход, для которого применима теория Марковица, состоит в выборе совокупности компенсационных активов. Считается, что доходность активов является случайной величиной, но вероятности их полных потерь нулевые. Тогда цель портфельного анализа состоит в выборе совокупности активов, которая обеспечит высокую среднюю доходность (критерий 1) и минимальное отклонение уровня дохода от этого среднего (критерий 2 – риск должен быть минимальным). Снижение риска достигается использованием компенсационных активов, коэффициент корреляции доходностей которых является отрицательным. Модель Марковица позволяет выбрать *оптимальный набор компенсационных активов с высокой средней доходностью.*

При записи модели используются свойства математического ожидания и формула математического ожидания суммы случайных величин. Пусть для формирования оптимального портфеля выбраны n активов, доходность которых на период инвестирования – случайные величины $Q_i,\ i=1,\dots,n$ с математическими ожиданиями $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ и дисперсиями $D[Q_i],\ i=1,\dots,n$. Пусть $x_i,\ i=1,\dots,n$ – доли использования каждого актива в формируемом портфеле, которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ \ i=1,\dots,n. \qquad (1.19)$$

Тогда доходность портфеля Q_P на периоде инвестирования – случайная величина, которая зависит от доходности активов и определяется по следующей формуле:

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i. \qquad (1.20)$$

Найдем математическое ожидание (среднее значение) доходности $\bar{Q}_P$:

$$M[Q_P] = M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot M[Q_i].$$

[14] https://ru.wikipedia.org/wiki/Портфельная_теория_Марковица

Формулу для средней доходности портфеля можно записать в более наглядном виде:

$$\bar{Q}_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i \, . \qquad (1.21)$$

Из формулы (1.21) следует, что средняя доходность формируемого портфеля определяется средними доходностями активов и долями их включения в портфель.

Найдем выражение для дисперсии доходности портфеля $D[Q_P]$:

$$D[Q_P] = M[(Q_P - \bar{Q}_i)^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (Q_i - \bar{Q})\right)^2\right].$$

Откуда получаем формулу для дисперсии портфеля в матричной записи:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T \, . \qquad (1.22)$$

Здесь вектор $x = (x_1, \, x_2, \dots, x_n)$ – доли активов размерностью (1 × n); x^T – вектор столбец долей активов размерностью (n × 1); K – ковариационная матрица активов, которая отражает взаимозависимость доходностей выбранных активов, размерностью (n × n).

Модель Марковица предписывает выбор оптимального вектора $x^{¿}$ долей, при котором средняя доходность портфеля должна быть не меньше заданной инвестором величины P_0 (ограничение на критерий 1), а уровень риска отклонения доходности от средней величины был бы минимальным (минимизация критерия 2)[15]. Математически модель записывается с использованием выражений (1.19), (1.21), (1.22) в следующем виде. Найти $x^{¿}$ из условий:

$$D[Q_P] = x \cdot K \cdot x^T \rightarrow \min \, ; \qquad (1.23)$$

$$\bar{Q}_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i \geq P_0 \, ; \qquad (1.24)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \, , \; x_i \geq 0 \, , \; i = 1, \dots, n \, . \qquad (1.25)$$

Упражнение. Доказать, что средний уровень доходности портфеля $\bar{Q}_P$ изменяется в пределах: $Q_{MIN} = \min(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1; \dots; \bar{Q}_n) \leq \bar{Q}_P \leq \max(\bar{Q}_1; \bar{Q}_1; \dots; \bar{Q}_n) = Q_{MAX}$, т.е. от минимальной средней Q_{MIN} до максимальной средней Q_{MAX} доходностей выбранных активов:

$$Q_{MIN} \leq \bar{Q}_P \leq Q_{MAX} \, . \qquad (1.26)$$

Рассмотрим уровни риска для оценок реальной доходности портфеля. Обозначим границы доходности портфеля: **%Низ** и **%Верх**. Математическая статистика дает следующие доверительные интервалы для реальной доходности портфеля (см. формулу (3.2)):

%Низ $¿ Q_P \leq$ **%Верх**, где **%Низ** $= \bar{Q}_P - t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$; **%Верх** $= \bar{Q}_P + t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$. (1.27)

---

[15] Рекомендуется выполнить **Упражнение** на стр. 10 для исследования способа решения двухкритериальной задачи принятия решений, к которой относится модель Марковица.

Здесь t_α – квантиль распределения доходности, определяемый заданным уровнем доверительной вероятности (для нормального распределения Q_P и уровня значимости 5% $t_\alpha = 1.96$).

Задание к вопросу экзамена 1.3.2. Портфельный анализ. **З**адание в МОДУЛ.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 2.2 – 2.7.

1.3.3. Инструментальные средства портфельного анализа

Поиск оптимального портфеля с использованием математической модели Марковица (1.23) – (1.25) требует найти оценки ее параметров и обосновать нижнее значение неравенства (1.24). Эти задачи решаются с использованием компьютерной модели в среде Excel путем формирования таблицы вариантов инвестиционных портфелей при разных значениях P_0 в границах, задаваемых неравенством (1.26).

Методические основы портфельного анализа в среде Excel с использованием инструмента «Поиск решения» в условиях стабильной и нестабильной экономик представлены в описании соответствующих индивидуальных расчетных работ, которые приведены в электронном курсе ММПР-РН в разделе **Задание к вопросу экзамена 1.3.2.**

При подготовке ответа на вопрос об инструментальных средствах портфельного анализа необходимо пояснить расчетные формулы, особенности программирования инструмента «Поиск решения» и описать порядок расчетов в случае стабильной и нестабильной экономик.

Раздел 2. Теоретико-игровые математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности

Примеры математических моделей. Модель контроля с одним ЛПР. Модель выборочного контроля с одним ЛПР. Модель контроля с двумя ЛПР. Игра «Государство-Предприниматели». Принципы выбора оптимальных стратегий в бескоалиционных играх (минимаксные стратегии, ситуации равновесия, устойчивые парето-оптимальные стратегии). Поле игры. Построение поля игры на примерах игры «Государство-Предприниматели» и на примере игры системы контроля.

Тема 2.1. Примеры математических моделей. Модель контроля с двумя ЛПР. Игра «Государство-Предприниматели».

2.1.1. Модель контроля с одним ЛПР

Рассмотрим поведение исполнителей в системах контроля. Пусть исполнителю поручено подготовить сообщение о параметрах реального процесса $Z^0 \in R^n$, а исполнитель оценивает состояние объекта контроля как $Z^{\Phi} \in R^n$, т.е. допускает ошибку:

$$\varepsilon = \left\| Z^0 - Z^{\Phi} \right\|, \tag{2.1}$$

где ε – некоторое «расстояние» между точками Z^0 и Z^{Φ} в n-мерном пространстве.

Идеальная работа исполнителя реально требует определенных затрат, поэтому для поддержания исполнительности в механизмах контроля предусматривается штраф, который считается пропорциональным величине ошибки. Тогда поведение исполнителя, т.е. выбор им величины $\varepsilon^{¿}$, минимизирует его общие издержки. Простейшей является следующая модель исполнителя:

$$f_u(\varepsilon) = a \cdot \varepsilon + \frac{b}{\varepsilon} \to \min_{\varepsilon \geq 0}; \quad a,\ b > 0 . \tag{2.2}$$

Здесь первое слагаемое – штраф за не исполнительность, второе – трудозатраты на подготовку сообщения. Оптимальное решение исполнителя находим решением задачи (2.2):

$$\varepsilon^{¿} = \sqrt{\frac{b}{a}} . \tag{2.3}$$

2.1.2. Модель выборочного контроля с одним ЛПР

В модели поведения исполнителя (2.2) предполагалось, что каждое задание исполнителя контролируется по факту его исполнения. На практике используется механизм выборочного контроля, при котором исполнитель оценивает вероятность контроля *p*, но не знает, что его ожидает контроль очередного исполнения. Возникает проблема принятия решения в условиях риска, которую формализуем следующей математической моделью:

$$f_u(p, \varepsilon) = p \cdot a \cdot \varepsilon + \frac{b}{\varepsilon} \to \min_{\varepsilon \geq 0}; \quad a,\ b > 0; \ p \in [0,\ 1] . \tag{2.2}$$

Используя принцип осреднения при обосновании стратегии исполнителя, получим следующее решение:

$$\widetilde{\varepsilon}^{¿}(p)=\sqrt{\frac{b}{p\cdot a}}. \tag{2.4}$$

2.1.3. Модель контроля с двумя ЛПР

Предполагаем, что частоту контроля выбирает контрольный орган (Центр) из условия минимизации затрат на контроль и потерь в системе из-за погрешности исполнения задания. Получаем модель выбора решений с 2 ЛПР в следующем виде:

$$f_{KO}(p,\varepsilon)=c\cdot p+d\cdot\varepsilon^2\rightarrow\min_{p\in[0,\,1]};\quad c,\,d>0; \tag{2.5}$$

$$f_u(p,\varepsilon)=p\cdot a\cdot\varepsilon+\frac{b}{\varepsilon}\rightarrow\min_{\varepsilon\geq 0};\quad a,\,b>0 \tag{2.6}$$

В выражении (2.5) первое слагаемое отражает затраты на контроль, а второе – системные потери от неидеального исполнения порученного задания.

2.1.4. Игра «Государство-Предприниматели»

Рассматриваем идеальное (модельное) общество, в котором предприниматели способны в год получать валовую прибыль $x\in[0,100\%]$. Налоговый механизм обеспечивает отчисление государству доли $k\in[0,1]$ прибыли. Найти оптимальное значение параметра $k^*\in[0,1]$, при котором государство имеет максимальные налоговые поступления.

В данном примере:

● Объект управления: механизм сбора налогов на доходы предпринимателей.

● Цель управления: максимум налоговых поступлений.

● Управляемый параметр: доля прибыли, отчисляемая предпринимателями государству.

В рассматриваемой проблемной ситуации взаимодействуют 2 игрока: государство и предприниматель, а сама игра известна в литературе как игра «Государство-Предприниматели». Игра задается следующими выражениями:

$$f_G(k,x)=k\cdot x\rightarrow\max_{k\in[0,\,1]}; \tag{2.7}$$

$$f_P(k,x)=(1-k)\cdot x-\phi(x)\rightarrow\max_{x\geq 0} \tag{2.8}$$

Функция $\phi(x)$ в выражении (2.8) носит название предпринимательских рисков и издержек по защите бизнеса, по компенсации социальных потерь предпринимателями и др. Из содержательной интерпретации эта функция неотрицательна, прогрессивно возрастает с ростом аргумента и асимптотически приближается к потенциалу предпринимательской активности. Уровень предпринимательского потенциала для нашей модельной страны можно принять за 100%. Одной из простых функций, удовлетворяющей этим свойствам, является логарифмическая функция $\phi(x)$:

$$\phi(x)=-\delta\ln\left(1-\frac{x}{100}\right),\ x\in[0,\,100);\ \delta>0 \tag{2.9}$$

Упражнение. Покажите, что функция (2.9) удовлетворяет перечисленным выше свойствам и имеет нулевое значение при $x=0$. Привести содержательную характеристику функции $\phi(x)$.

Рассмотрим один из очевидных способов решения игры (2.7), (2.8), который (будут показано ниже) соответствует ситуациям равновесия по Штакельбергу.

Рассчитываем валовую прибыль предпринимателей для различных $k \in [0,1]$ (рис. 2.1).

$$f(x,k)=(1-k)\cdot x-\phi(x) \to \max; \quad x \in [0,100]; \qquad \phi(x)=\delta\left|\ln\left(1-\frac{x}{100}\right)\right|.$$

Находим $x^{¿}(k)=100-\frac{\delta}{1-k}$, если $k \le k_{\max} < 1$.

Выделяем в доходе предпринимателей налоговую долю $HC=k\cdot x^{¿}(k)$ (рис. 2.2).

Рис. 2.1. Зависимость активности предпринимателей от налоговой ставки

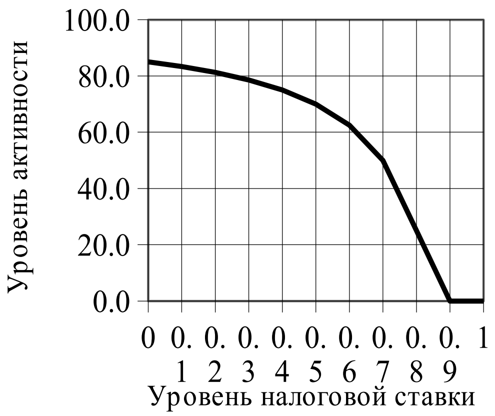
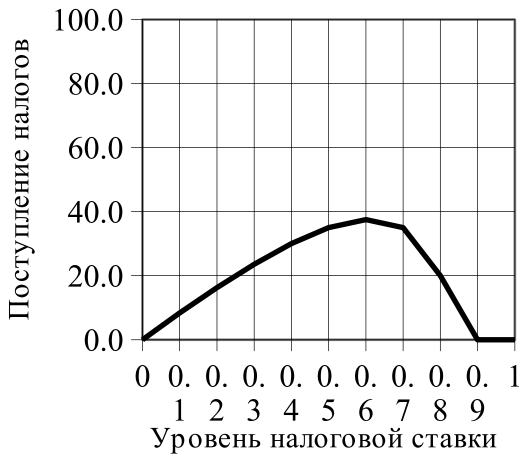


Рис. 2.2. Зависимость налоговых сборов от налоговой ставки



Как видим, математическая модель налоговых сборов определяется параметром δ – это уровень нереализованной активности предпринимательства при нулевой налоговой ставке. Полагаем δ =15%. Получим следующие показатели системы, характеризующие механизм налоговых сборов.

№ п/п.	Наименование показателя	Значение
1.	Оптимальная налоговая ставка	$k^{¿}=0,6$
2.	Активность предпринимателей	60%
3.	Максимальные налоговые сборы	36%
4.	Доля дохода предпринимателей	24%

5.	Потери общества при данном механизме сбора налогов (85-60)	25%

Тема 2.2. Принципы выбора оптимальных стратегий в бескоалиционных играх (минимаксные стратегии, ситуации равновесия, устойчивые парето-оптимальные стратегии).

2.2.1. Минимаксные стратегии: игра двух лиц

Пусть X_1, X_2 – множества стратегий игроков, а $f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)$ – их функции выигрышей соответственно. Математическая модель выбора оптимальных стратегий запишется так:

$$f_1(x_1, x_2) \to \max_{x_1 \in X_1}; \qquad (2.10)$$

$$f_2(x_1, x_2) \to \max_{x_2 \in X_2}. \qquad (2.11)$$

Минимаксную стратегию x_1^M игрока 1 находим из следующей математической задачи[16]:

$$L_1 = f_1(x_1^M, \widetilde{x}_2(x_1^M)) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1, x_2) \qquad (2.12)$$

Здесь L_1 – гарантированный выигрыш первого игрока; $\widetilde{x}_2(x_1)$ – оценка стратегии (реакции) партнера в зависимости от выбора стратегии $x_1 \in X_1$. Эта функция в теории игр имеет смысл функции наказания (наступления). Минимаксную стратегию называют защитной стратегией.

Минимаксную стратегию x_2^M игрока 2 находим аналогично:

$$L_2 = f_2(\widetilde{x}_1(x_2^M),\ x_2^M) = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) \qquad (2.13)$$

Описание переменных выражения (2.13) аналогично описанию (2.12).

Если каждый из игроков выбирает минимаксную стратегию, то действительная ситуация в игре $(x_1^M,\ x_2^M)$ и оценки выигрышей игроков L_1, L_2 отличаются от ожидаемых (расчетных) значений.

Упражнение. Покажите справедливость неравенств: $f_1(x_1^M,\ x_2^M) \ge L_1;\ f_2(x_1^M,\ x_2^M) \ge L_2$.

2.2.2. Ситуации равновесия по Нэшу и Штакельбергу: игра двух лиц

Минимаксные стратегии игроков в современной теории игр рекомендуются игрокам в качестве защитного поведения и в качестве оценок гарантированных результатов. Ситуации равновесия (если они существуют) предпочтительнее для игроков. Они могут реализоваться в игре при следующих условиях: игроки согласны на обмен информацией по их поиску (согласны на переговоры); игроки согласны их реализовать (выполняют условие обязующего соглашения).

Ситуация $(x_1^H,\ x_2^H)$ в игре (2.10), (2.11) называется ситуацией равновесия по Нэшу, если:

$$f_1(x_1^H,\ x_2^H) \ge f_1(x_1^H,\ x_2)\ \forall\ x_2 \in X_2; \qquad (2.14)$$

$$f_2(x_1^H,\ x_2^H) \ge f_2(x_1,\ x_2^H)\ \forall\ x_1 \in X_1. \qquad (2.15)$$

Упражнение. Докажите неравенства: $f_1(x_1^H,\ x_2^H) \ge f_1(x_1^M,\ x_2^M);\ f_2(x_1^H,\ x_2^H) \ge f_2(x_1^M,\ x_2^M)$.

[16] Здесь и далее полагаем, что в математических задачах экстремумы существуют.

Для игр (2.10), (2.11) находят ситуации равновесия по Штакельбергу в предположении, что один из игроков наделен правом первого хода. Это право может быть институциональным (как в игре «Государство-Предприниматели») или по условиям рыночной ситуации, например, в отношениях работника и работодателя.

Предположим, что ведущим является игрок 1 и что он знает реакцию второго игрока $\widetilde{x}_2(x_1)$ на свои решения[17]. Ситуация $(x_1^S,\ x_2^S)$ в игре (2.10), (2.11) называется ситуацией равновесия по Штакельбергу, если она найдена решением следующих задач:

$$f_1(x_1^S,\widetilde{x}_2(x_1^S))=\max_{x_1\in X_1} f_1(x_1,\widetilde{x}_2(x_1));\ \ x_2^S=\widetilde{x}_2(x_1^S). \qquad (2.16)$$

Упражнение. Поясните схему поиска ситуации $(x_1^S,\ x_2^S)$ на примере игры «Государство-Предприниматели» (рис. 2.1 и 2.2).

Тема 2.3. Поле игры. Гипотезы поведения игроков. Построение поля игры на примерах игры «Государство-Предприниматели» и модели контроля с двумя ЛПР.

2.3.1. Поле игры. Гипотезы поведения игроков

Понятие «Поле игры» отражает игровое содержание множества совместных выигрышей игроков. Для игры (2.10), (2.11) это множество (обозначим его $\varPhi$) определим так:

$$\varPhi=\{(f_1,f_2/f_1=f_1(x_1,x_2);\ f_2=f_2(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in X_1\times X_2;\ f_1\ge L_1;\ f_2\ge L_2\}. \qquad (2.17)$$

Для игроков, которые минимизируют свои выигрыши (например, в игре «Система контроля») их Поле игры определяется выражением, аналогичным (2.17), в котором неравенства с гарантированными результатами заменены на противоположные.

Гипотезы поведения игроков в игре (2.10), (2.11) включает два условия:

1. Оптимальные выигрыши игроков лежат на «верхней» границе P множества $\varPhi$. Множество P в теории игр носит название множество парето-оптимальных выигрышей. Содержательно, это множество таких выигрышей игроков, что увеличение выигрыша одного игрока возможно только при уменьшении (строгом) выигрыша другого игрока.

2. Игроки вправе в процессе переговоров выбрать оптимальные стратегии $(x_1^P,\ x_2^P)$ (называют **парето-оптимальные стратегии**), соответствующие выигрыши игроков при которых принадлежат множеству P (**называют парето-оптимальные выигрыши**). Этот выбор является решением игры, если выполнено условие обязующего соглашения.

2.3.2. Построение поля игры на примерах игры «Государство-Предприниматели» и модели контроля с двумя ЛПР.

Построение поля игры «Государство-Предприниматели» состоит в вычислении параметров выражения (2.17) используя задание игры (2.7), (2.8). Непосредственными вычислениями находим: $L_G=0:\ L_P=0$. Найдем максимальный выигрыш Предпринимателей $\bar{f}_P$:

---

[17] Предполагается, что $\widetilde{x}_2(x_1)$ – функция, определенная на множестве стратегий игрока 1.

$$\bar{f}_P = \max_{x \ge 0;\, k \in [0,1]} f_P(k,x) = \max_{x \ge 0;\, k \in [0,1]} \left((1-k)\cdot x - \phi(x)\right) = \max_{x \ge 0} \left(x - \phi(x)\right). \qquad (2.18)$$

Для любого $f_P \in [0, \bar{f}_P]$ найдем максимальное значение выигрыша первого игрока:

$$f_G = \max_{x \ge 0;\, k \in [0,1]} f_G(k,x) = \max_{x \ge 0;\, k \in [0,1]} (k \cdot x);\ (1-k)\cdot x - \phi(x) = f_P\ \forall\ f_P \in [0, \bar{f}_P]. \qquad (2.19)$$

Упражнение. Покажите, что $f_G = \bar{f}_P - f_P$ – решение задачи (2.19).

Окончательно получим Поле игры «Государство-Предприниматели» в следующем виде:

$$\Phi = \left\{(f_G, f_P) / f_G + f_P \le \bar{f}_P;\ f_G \ge 0;\ f_P \ge 0\right\}. \qquad (2.20)$$

Запишем множество парето-оптимальных выигрышей рассматриваемой игры:

$$P = \left\{(f_G, f_P) / f_G + f_P = \bar{f}_P;\ f_G > 0;\ f_P > 0\right\}. \qquad (2.21)$$

Упражнение. Графически представьте множества Φ и P.

Задание к вопросу экзамена 2.3.2. Найти множества Φ и P игры «Система контроля» (2.5), (2.6) и исследовать их свойства. Описать содержательно интересы игроков, множества их стратегий. С использованием компьютерных программ в среде Excel провести исследование оптимальных стратегий игроков (минимакс, ситуации равновесия по Нэшу, по Штакельбергу и Парето-оптимум). Индивидуальное задание в МОДУЛ.

Тема 3.1. Оптимизация бонуса менеджеров производственной и финансовой компаний.

3.1.1. Модель поведения работника на рабочем месте

Приведем основные определения[18]. Справедливой (рыночно равновесной) будем считать сделку, при которой согласованная заработная плата равна произведению количества продаваемого труда на его цену (сдельная система оплаты труда).

В качестве **меры труда** (единицы измерения объема работы) выберем **часовую норму труда** (*ЧНТ*) – объем работы, который реально выполняет среднерыночный (для сегмента локального рынка) работник в течение одного рабочего часа. Эта характеристика для среднерыночного работника может быть оценена как часовая норма выработки. Такой работник за 8-часовой рабочий день выполнит объем работы 8 *ЧНТ*. При оплате труда в 100 руб. за *ЧНТ* его месячная заработная плата (20 рабочих дней) равна 16 000 руб.

Потенциал трудовой активности (*ПТА*) работника определим, как объем работы в *ЧНТ*, который он способен выполнить в среднем за рабочий день. Мы также используем понятие **фактическая трудовая активность** (*ФТА)* работника.

Приведем пример аналитического выражения для *ФТА*:

$$ФТА = \tilde{x}(p) = \begin{cases} ПТА - \dfrac{\delta}{p^n}, & если\ p > p_{\min} = \left(\dfrac{\delta}{ПТА}\right)^{\frac{1}{n}} \\ 0, & в\ противном\ случае. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Здесь $\delta,\ n,\ p_{\min}$ – параметры, значения которых определяются состоянием локального рынка труда по заданной профессии работника и его трудовыми характеристиками.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 1, 4, 29, 33, 41, 44.

3.1.2. Модель оптимизации бонуса менеджеров производственных и финансовых компаний

Эффективным механизмом стимулирования менеджеров является выделение доли $\sigma \in [0,\ 1]$, дополнительной прибыли, полученной этим менеджером, в качестве бонуса (премиального вознаграждения). Тогда оптимальное значение $\sigma^{¿}$ должно обеспечивать максимальные результаты для собственника рассматриваемой экономической системы.

Рассмотрим задачу оптимизации бонуса менеджеру, зависимость среднедневного объема работ которого от ставки оплаты труда $x = \tilde{x}(p)$ задана выражением (3.1).

[18] Подробнее ознакомиться с моделью поведения работника на рабочем месте можно по учебному пособию: Булатова, Г.А. Методы и математические модели управления персоналом [Текст] : учебное пособие / Г.А. Булатова, А.С. Маничева, Н.М. Оскорбин. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2015. – 108 с. (файл прилагается в МОДУЛ).

Обозначим через

$$D_{\Phi}(x)=C\cdot x^{m},\; C>0,\; m\in[0,\,1], \tag{3.2}$$

зависимость среднедневной валовой прибыли фирмы, полученной за счет активности стимулируемых менеджеров. Функцию (3.2) дополнительной прибыли от трудового вклада менеджера можно получить на основе функции Кобба-Дугласа при постоянной величине капитала фирмы.

Дополнительная валовая прибыль D_{Φ} разделяется на чистую прибыль собственника D_C и оплату труда менеджеров D_B:

$$D_C(x)=(1-\sigma)\cdot C\cdot x^{m};\; D_B(x)=\sigma\cdot C\cdot x^{m} \tag{3.3}$$

С учетом выражения (3.3) задачу выбора оптимального значения $\sigma^{¿}$ запишем в следующем виде. Найти $\sigma^{¿}\in[0,\,1]$, при котором доход собственника является максимальным:

$$D_C(x)=(1-\sigma)\cdot C\cdot x^{m}\rightarrow\max. \tag{3.4}$$

Можно показать, что при фиксированной величине $\sigma\in[0,\,1]$ и заданной активности $x=\widetilde{x}(p)$ оплата p единицы активности и уровень активности x определятся из следующего уравнения:

$$p\cdot\widetilde{x}(p)=\sigma\cdot C\cdot(\widetilde{x}(p))^{m}, \tag{3.5}$$

решение которого необходимо учитывать как дополнительное условие задачи (3.4).

В описании к лабораторной работе 4 представлена методика идентификации функции (4.5) и программное обеспечение в среде Excel для решения задачи (4.7) в случае, когда в (4.1) параметр n равен единице.

Задание по теме 3.1.2. Выполнить расчетную работу по оптимизации бонуса менеджера для индивидуальных исходных данных, представленных в МОДУЛ.

Справочно: Смотри глоссарий (Приложение 2) пп. 3.2, 3.12, 1.24.

Тема 3.2. Математические модели планирования производства на основе математического программирования.

3.2.1. Математическая модель планирования объединения предприятий.

В сложных системах (с двумя и более центрами принятия решений) кроме основных функций управления возникают дополнительные, такие как согласование и координация решений. **Координация решения** – это согласование деятельности, целей, зон ответственности, распределение общих ресурсов, совместного дохода.

Типичным примером сложной системы в экономике является система **корпоративного управления** – организационная модель, с помощью которой корпорация представляет и защищает интересы своих инвесторов. Тип применяемой модели зависит от структуры корпорации, существующей в рамках рыночной экономики, и отражает факт разделения функций владения и управления корпорацией. В общем случае, **корпорация** – объединение n юридических лиц плюс одна управляющая компания, которую далее называем Центром.

Исследование проводится на примере задачи квадратичного программирования, которая рассматривается как математическая модель планирования объединения T промышленных предприятий в следующем виде[19]:

$$\min_{x \in X} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (P_t^H - p_t x_t)^2 | x_t \in X_t,\ t = 1, \ldots, T;\ \sum_{t=1}^{T} \bar{A} x_t \le B \right\}, \qquad (3.6)$$

где P_t^H – потенциальная прибыль, а X_t – допустимое множество планов предприятия t в составе корпорации: $X_t = \left\{ x_t \in R^{n_t} | A_t x_t \text{¿} B_t;\ x_t \text{¿} 0 \right\}$.

Матрицы в приведенных выражениях имеют следующие размерности: $p_t - (1 \times n_t); x_t - (n_t \times 1); \bar{A}_t - (m \times n_t); B - (m \times 1); A_t - (m_t \times n_t)$.

Экономический смысл модели планирования состоит в оптимизации планов производства объединения, при котором потенциальные возможности предприятий по прибыли максимально реализуются при ограниченных ресурсах объединения.

Справочно: глоссарий (Приложение 2) пп. 3.4 – 3.6.

3.2.2. Имитационная модель планирования объединения промышленных предприятий

Имитационная модель разработана в среде Excel для исследования проблемы планирования объединения промышленных предприятий. Для генерации матриц в условиях задачи (3.6) задаются их размерности, а значения элементов матриц заполняются равномерно распределенными псевдо случайными числами в заданных интервалах. Значения параметров P_t^H для каждого предприятия определяются решением задач линейного программирования при условии выделения предприятию t всего объема имеющихся ресурсов объединения. Индивидуальные варианты исходных данных задаются своим списком 5 предприятий для объединения.

Таким образом, в процессе исследования задачи планирования решаются 5 задач линейного программирования и одна задача квадратичного программирования (3.6).

Задание по теме 3.2.2. Провести исследование задачи планирования объединения предприятий для индивидуальных исходных данных, приведенных в МОДУЛ.

---

[19] Смотрите подробнее: Оскорбин Н.М., Хвалынский Д.С. Декомпозиция экстремальных задач на основе метода Данцига-Вульфа // Ломоносовские чтения на Алтае : сборник научных трудов Международной молодежной школы-семинара, 5-8 ноября 2013. – Барнаул: Из-во Алт. ун-та, 2013. – С. 199-203. Оскорбин Н.М. и др. (файл «Оскорбин ИТ-НГУ-2010.pdf» прилагается).

Приложение 1. Вопросы к экзамену.

1. Основные понятия теории принятия решений. Историческая справка.
2. Технология решения прикладных задач поддержки принятия решений.
3. Место исследования операций в математическом моделировании.
4. Классификация математических моделей по типу математических задач и по свойствам предметной области.
5. Понятие математической модели принятия решений.
6. Моделирование процессов.
7. Производственные функции.
8. Модель стратегического планирования фирмы на основе производственной функции.
9. Методы исполнения решений на различных этапах цикла принятия решений на примере задачи распределения ресурсов.
10. Принципы обоснования решений в условиях риска и неопределенности.
11. Портфельный анализ: модель Марковица.
12. Инструментальные средства портфельного анализа.
13. Примеры математических моделей. Модель контроля с одним ЛПР.
14. Примеры математических моделей. Модель выборочного контроля с одним ЛПР.
15. Примеры математических моделей. Модель контроля с двумя ЛПР.
16. Примеры математических моделей. Игра «Государство-Предприниматели».
17. Принципы выбора оптимальных стратегий: минимаксные стратегии: игра двух лиц.
18. Принципы выбора оптимальных стратегий: ситуации равновесия по Нэшу и Штакельбергу.
19. Поле игры. Гипотезы поведения игроков.
20. Построение поля «Государство-Предприниматели» и на примере игры системы контроля.
21. Модель поведения работника на рабочем месте.
22. Модель оптимизации бонуса менеджеров производственных и финансовых компаний.
23. Математическая модель планирования объединения промышленных предприятий.
24. Имитационная модель планирования объединения промышленных предприятий.

При подготовке к экзамену учебный материал представлен (по каждому вопросу отдельно) в основном учебном пособии по курсу, а основные понятия приведены в глоссарии (Приложение 2).

Приложение 2. Основные понятия по дисциплине (глоссарий)

«Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности»

Раздел 1. Теоретические основы моделирования процессов принятия решений в условиях рисков и неопределенностей

1.1. **Ассоциативные знания** – система знаний и данных, возникающие у человека при восприятии сигналов и/или знаков. В системах искусственного интеллекта используется ассоциативная модель знаний. Эта модель использует понятие формальной системы, задаваемой как A = (U, C, L, I), где A – ассоциативная сеть представления знаний; U – множество узловых элементов ассоциативной сети; C – множество коннекций (контактных связей) элементов; L – множество правил построения сети и определения параметров коннекций; I – правила ассоциативного вывода (процедуры процессирования знаний).

1.2. **Данные** – один из двух главных компонентов информационных моделей человека (и систем искусственного интеллекта) об объектах и явлениях мира. Второй компонент – знания.

1.3. **Задача ранжирования альтернатив** – расположение объектов в порядке возрастания или убывания какого-либо присущего им свойства.

1.4. **Знаковая система**– система однообразно интерпретируемых и трактуемых сообщений/сигналов, которыми можно обмениваться в процессе общения. Иногда знаковые системы помогают структурировать процесс общения с целью придания ему некой адекватности в плане реакций его участников на те или иные «знаки» (https://ru.wikipedia.org/wiki/Знаковая_система).

1.5. **Знания** – один из двух главных компонентов информационных моделей человека (и систем искусственного интеллекта) об объектах и явлениях мира. Отличие знаний от данных: более структурированы и связны, т.е. самое важное в знаниях не сами данные, а связи между ними; более само интерпретируемы; отвечают не только на вопросы «что», «кто», «где», «когда», но и на вопросы «как» и «почему»»» субъективны в отличие от объективности данных; могут быть противоречивы, не полны и не точны.

1.6. **Инструментальные методы в экономике** – информационные системы и технологии в экономике.

1.7. **Исследование операций** – научная дисциплина, в рамках которой разрабатываются математические модели поддержки принятия решений в экономических и социальных системах.

1.8. **Коэффициент конкордации по Кэнделу(W) –** количественный показатель согласованности мнений экспертов при ранжировании альтернатив. Нулевое значение W соответствует абсолютному хаосу мнений, при полной согласованности мнений экспертов W равен единице. Известны пороговые значения W, которые соответствуют частичной согласованности при уровне доверия 95% и при уровне доверия 99%. Например, при числе экспертов 8 и числе альтернатив 5 эти значения равны соответственно 0.287 и 0.379. Пусть

W при экспертном опросе принял значение 0.5. Тогда мы считаем, что мнения экспертов можно считать согласованными и ошибка такого решения менее 1%. Следует помнить, что согласованность мнений экспертов необходимое, но не достаточное условие истинности экспертных оценок.

1.9. **Линейная производственная функция** – производственная функция с произвольным числом факторов, влияние которых является аддитивным.

1.10. **Лицо, принимающее решение** – ЛПР – обобщенное абстрактное понятие, в которое включена совокупность свойств реальных центров принятия решений, условий (экономических, финансовых, информационных, временных) в которых это решение формируется, в том числе установленные границы зон ответственности принятых решений, возможности (или невозможности) их корректирования и т.д.

1.11. **ЛПР** – лицо, принимающее решение, в теории принятия решений, исследовании операции, системном анализе – субъект решения (менеджер), наделённый определёнными полномочиями и несущий ответственность за его последствия.

1.12. **Математическая (*компьютерная*) модель** – отражение в математических символах (*компьютерных операторах*) существенных сторон исследуемого явления или процесса.

1.13. **Метод множителей Лагранжа** – классический метод решения задач оптимизации с ограничениями типа равенств.

1.14. **Многокритериальные модели принятия решений** – модели решений с одним ЛПР, которое оценивает полезность решений вектором показателей.

1.15. **Модель в виде «черного ящика»** – кибернетическая модель процессов, которая включает перечень входных и выходных переменных и схематическое изображение оператора преобразований.

1.16. **Обобщенная функция Кобба-Дугласа** – производственная функция с произвольным числом факторов, математическое выражение которой аналогично классической функции.

1.17. **Порядковая шкала** – шкала упорядоченных оценок экономических или социальных факторов. Например, удовлетворенность чем-либо: полностью – 1, скорее да чем нет – 2, трудно сказать – 3, скорее нет – 4, полностью не удовлетворен – 5 (http://vgam2004.narod.ru/_tssa/izmerenie1.htm)

1.18. **Проблемная ситуация** – состояние объекта аналитических исследований в экономике, относительно которого требуется обосновать управленческие решения, т.е. комплексно решить задачи: «знать», «предвидеть», «управлять».

1.19. **Производственная функция** – математическая модель продуктивности (результативности) коммерческой организации, отрасли или экономики страны в целом. Смотрите также: обобщенная функция Кобба-Дугласа; Линейная производственная функция; функция Кобба-Дугласа.

1.20. **Ранжирование** – расположение объектов в порядке возрастания или убывания какого-либо присущего им свойства.

1.21. **Свертка критериев** – сведение многокритериальной задачи к однокритериальной задаче обоснования решений. Используют линейную и специальные нелинейные функции свертки частных критериев.

1.22. **Структурированность проблемы** – требование к объектам аналитических исследований, при котором выделены главные факторы и существенные связи. Достигается специальной обработкой базы знаний и базы данных объектов и явлений проблемной области.

1.23. **Теория игр** – теория математических моделей обоснования оптимальных решений в условиях конфликтов и неопределенностей.

1.24. **Функция Кобба-Дугласа** – классическая производственная функция, в которой факторами производства выступают труд и капитал.

1.25. **Экономический человек** – условное общее понятие, представление о человеке как о рационально мыслящем субъекте, строящем свои планы и действия, исходя из принципа получения максимальной выгоды.

1.26. **Экспериментальный метод** – способ познавания, основанный на результатах натурных и наблюдениях за развитием реальных процессов и явлений.

1.27. **Экспертная информация** – информация (знания и данные), получаемая от экспертов, в удобной аналитической форме, т.е. в формализованном виде и используемая для подготовки предложений для решения технико-экономических и хозяйственных задач, которые не могут в полной мере быть описаны математическими методами.

1.28. **Эмпирический метод** – способ познавания, который использует данные наблюдений. Этот способ базируется в главном на опыте и тем самым радикально отличается от подхода рационалистического (теоретического).

1.29. **Этапы цикла принятия и реализации решений** – минимально выделяются 4 этапа: сбор исходных данных и анализ экономической проблемы; обоснование оптимального решения и его принятие; реализация решения; оценка полученного результата и при необходимости внесение изменений в регламентные процедуры. Анализ и исследование этапов цикла принятия и реализации решений актуально для повторяющихся процессов (ситуаций) обоснования и принятия решений. Позволяет повысить эффективность процедур принятия и реализации решений за счет использования метода «проб и ошибок».

Раздел 2. Теоретико-игровые модели принятия решений в условиях рисков и неопределенностей

2.1. **Варианты инвестиционных портфелей** – при фиксированном наборе финансовых инструментов вся совокупность решений задачи оптимизации Марковица с ограничениями, заданными на регулярной сетке ожидаемых доходностей.

2.2. **Доходность инвестиционного портфеля в теории Марковица** – среднее значение (математическое ожидание) прироста инвестиционных ресурсов, которое оценивается по прогнозируемым результатам реализации инвестиционной стратегии, в процентах.

2.3. **Ковариационная матрица в модели Марковица** – квадратная матрица, отражающая взаимосвязи (положительные или отрицательные) доходностей выбранных финансовых инструментов. Используется для оценки дисперсии, доверительного интервала и риска доходности инвестиционных портфелей.

2.4. **Метод максимума гарантированной доходности** – принцип выбора оптимального инвестиционного портфеля из совокупности вариантов, который имеет максимальную величину нижней оценки интервалов доходностей.

2.5. **Портфельная теория Марковица** – подход, основанный на анализе ожидаемых средних значений и вариаций случайных величин доходностей совокупности выбранных инвестором финансовых инструментов. Теория и математическая модель разработаны Гарри Марковицем в 1952 г. Теория включает методику формирования инвестиционного портфеля, т.е. оптимальный выбор активов, исходя из требуемого соотношения доходности и риска.

2.6. **Риск инвестиционного портфеля** – в портфельной теории Марковица определяется величиной возможного *снижения доходности* от расчетной средней доходности совокупности финансовых инструментов.

2.7. **Характеристика инвестиционного портфеля в теории Марковица** – состав и интенсивности (в процентах объема инвестиций) использования инвестиционных инструментов, направленных на повышение доходности и сокращения рисков вложения фиксированной суммы финансовых ресурсов.

2.8. **Теоретико игровые модели** – математические модели обоснования оптимальных решений в системах с многими центрами принятия решений. Классические модели теории игр разработаны Дж. Фон Нейманом.

2.9. **Игры с постоянной суммой** – игры n лиц, в каждой ситуации которой сумма выигрышей игроков постоянна. В рассматриваемом классе игр противоречия при поиске компромисса не могут быть устранены. В теории игр доказано, что любая игра с постоянной суммой стратегически эквивалентна игре с нулевой суммой.

2.10. **Антагонистические игры** – игры двух лиц с нулевой суммой.

2.11. **Игры с непротивоположными интересами** – класс игр, который не содержит игры с постоянной суммой. В этих играх игроки, как правило, заинтересованы в совместных действиях, т.е. в реализации процессов координации решений.

2.12. **Теоретико игровые принципы выбора оптимальных стратегий** – математические модели формализации типов взаимодействия игроков. Отсутствие взаимодействия – независимый выбор игроками своих стратегий с использованием процедур принятия решений в условиях неопределенности (критерии Вальда, Байеса-Лапласа, Гурвица, Сэвиджа). При взаимодействии используют принципы Нэша, Штакельберга, Паретто.

2.13. **Иерархические игры** – игры Гермейера, в которых учитываются неравноправные отношения игроков и право центра выбора первого хода.

3.1. **Активность работника** – при моделировании поведения работника в средних условиях рабочего дня определяется объемом работы (в ЧНТ), который работник выполняет или способен выполнить при заданных (стабильных) условиях оплаты и стимулирования его труда.

3.2. **Бонус менеджера** – эффективный механизм стимулирования собственником в корпоративных структурах исполнительной дирекции (менеджмента) путем выделение доли, полученной этой структурой прибыли в качестве премиального вознаграждения.

3.3. **Валентность работника** – одна из существенных характеристик работника, определяющая его трудовую активность, наряду с продолжительностью рабочего дня, индексами квалификации и интенсивности труда. В теории мотивации В. Врума определяется как восприимчивость работника к денежному вознаграждению. Исследования показывают, что валентность работка определяется также степенью его отчуждения (или доброжелательности) к целям и действиям работодателя.

3.4. **Децентрализованная модель управления в корпорациях** использует рыночный механизм, центр устанавливает внутрифирменные цены, лимиты. Каждое предприятие «покупает» часть ресурса, который необходим для достижения собственных целей. Решения о количестве приобретаемого ресурса предприятия принимают самостоятельно.

3.5. **Координация решений в иерархических системах** – согласование решений участников совместной деятельности, включает согласование целей, зон ответственности, распределения общих ресурсов, совместного дохода и др.

3.6. **Корпорация** – объединение n юридических лиц плюс (как правило) одна управляющая компания.

3.7. **Математическая модель активности работника** – формула зависимости фактической трудовой активности работника *(ФТА, т.е. объема работы, который работник выполнит в среднем за рабочий день при сдельной системе оплаты его труда)* от уровня расценки, заданной работодателем.

3.8. **Математическая модель планирования объединения промышленных предприятий** записывается как задача блочного линейного программирования. Она включает систему локальных ограничений (равенств и неравенств) для каждого предприятия корпорации и систему глобальных ограничений по ресурсам управляющей компании. Модель планирования объединения имеет блочно-диагональную структуру системы ограничений.

3.9. **Метод Данцига-Вульфа** – один из методов решения задач блочного линейного программирования.

3.10. **Нормативная величина фактической трудовой активности** ($ФТА_Н$) – количественное выражение объема работы, который работник (среднерыночного и индивидуального) по расчету выполнит в среднем за рабочий день при среднерыночных условиях сдельной системы оплаты его труда. Этот показатель используется при идентификации математической модели поведения работника и определяется по формуле:

$ФТА_Н = Т^*к_{кв}{}^*к_{ин}$, где $Т$ – продолжительность рабочего дня данного работника, *в рабочих часах* ; $к_{кв}$, $к_{ин}$ – индексы квалификации и интенсивности труда.

3.11. **Потенциал трудовой активности работника** – ПТА–количественное выражение предельной трудовой активности работника (среднерыночного и индивидуального) как объема работы, который работник **способен** выполнить в среднем за рабочий день. Этот показатель используется при идентификации математической модели поведения работника и определяется по формуле: $ПТА = ФТА_Н / \alpha$, где $ФТА_Н$ – нормативная величина фактической трудовой активности данного работника, час.; α – среднерыночный коэффициент интенсивности труда рассматриваемого локального рынка, который может дифференцироваться по группам работников. Оценка для рынка труда г. Барнаула: $\alpha = 0.7$. Для среднерыночного работника г. Барнаула при 8 часовом рабочем дне этот показатель имеет значение: $ПТА = 8/0.7 = 11.4$.

3.12. **Формула трудовой активности** – количественное выражение *ФТА* – фактической трудовой активности работника – как объема работы, который работник выполнит в среднем за рабочий день при сдельной системе оплаты его труда в зависимости от уровня расценки (руб./*ЧНТ*), заданной работодателем.

3.13. **Часовая норма труда** (*ЧНТ*) – количественный показатель объемов работы работников на локальном рынке труда, определяется как объем работы, который среднерыночный работника выполняет в течение одного рабочего часа. Показатель используется в математической модели активности работников в трудовых процессах как ***измеритель объема работ***. Количественно его значение равно норме выработки. Для работников ряда профессиональных групп показатель ЧНТ выражается в натуральных единицах (для токаря, в числе изготовленных деталей в среднем за рабочий час; для землекопа – в кубических метрах котлована; для маляра – в квадратных метрах обработанной поверхности при требуемом качестве). Однако для многих профессий указать натуральный состав и количество выполненных работ не представляется возможным. В ряде таких случаев работодатель оценивает нормативный объем работы в конечных результатах (для наемного попрошайки – величина собранной милостыни; для рыбака – пойманной рыбы; для менеджера – ?). Наблюдение за трудовыми процессами показывают, что грамотные и эффективные работодатели ***всегда имеют инструменты оценки объемов работ и трудовых затрат*** своих работников. В математических моделях результативность (объемы работ) оценивается числом часовых норм труда. Различаем объем работы как задание работника до начала трудового процесса и как фактическая его активность после его завершения.